Энгельсский технологический институт (филиал) федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.»

Кафедра «Естественные и математические науки»

СТАТИКА

Методические указания к практическим занятиям
и выполнению контрольной работы по дисциплине
«ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»
для студентов направлений

15.03.02 «Технологические машины и оборудование»
15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств»
18.03.01 «Химическая технология»
21.03.01 «Нефтегазовое дело»

очной и заочной формы обучения

Энгельс 2024

Введение.

Теоретическая механика является основой многих современных инженерных дисциплин. Без глубокого усвоения положений и методов теоретической механики невозможно дальнейшее изучение большинства технических наук. Кроме того, в процессе изучения теоретической механики студенты впервые используют математический аппарат для решения конкретных задач.

Особое место в изучении курса занимает решение задач, которое позволяет закреплять и углублять теоретические знания, развивает навыки самостоятельного мышления, помогает овладению математическими методами.

Предлагаемые методические указания предназначены для организации самостоятельной работы студентов, и могут быть использованы преподавателями при проведении практических занятий и контрольных работ по теоретической механике при изучении раздела «Статика».

Методические указания включают в себя сведения из теории, примеры и 10 различных вариантов заданий по темам: определение равнодействующей плоской сходящейся системы сил, условия равновесия плоской произвольной системы сил, определение главного вектора пространственной системы сил, определение главного момента производственной системы сил.

1. Плоская сходящаяся система сил

Сходящимися называются силы, линии действия которых пересекаются в одной точке, их равнодействующая приложена в точке пересечения линий действия; она изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах ,как на сторонах.

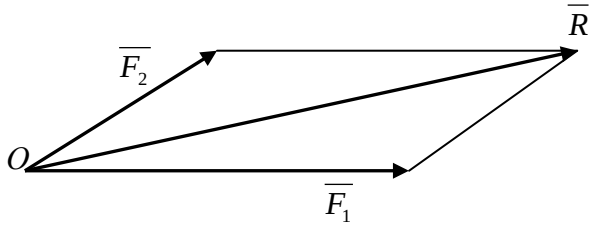


Рис.1

Равнодействующая $\overline{R}$ системы сходящихся сил $(\overline{F_1}, \overline{F_2}, ..., \overline{F_n})$ равна их геометрической сумме, и проекция равнодействующей на каждую из координатных осей прямоугольной системы координат Oxy равна алгебраической сумме проекций всех составляющих:

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F_k}\,, \qquad R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}\,, \quad R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}\,.$$

Модуль и направление равнодействующей определяются по формулам:

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}\,,\quad \cos(\overline{R},\overline{i})=\frac{R_x}{R}\,,\quad \cos(\overline{R},\overline{j})=\frac{R_y}{R}\,.$$

В случае, когда силы взаимно уравновешиваются, их равнодействующая равна нулю $\overline{R}=0$ $(R_x=0, R_y=0)$.

<u>*Примечание.*</u> Для пространственной системы сходящихся сил имеем три уравнения равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n}F_{kx}=0\,,\quad \sum_{k=1}^{n}F_{ky}=0\,,\quad \sum_{k=1}^{n}F_{kz}=0\,.$$

Пример 1. Определить равнодействующую четырёх сил: $F_1=18кн$, $F_2=10кн$, $F_3=6кн$, $F_4=8кн$, приложенных к точке A и направленных, как показано на рис.2а.

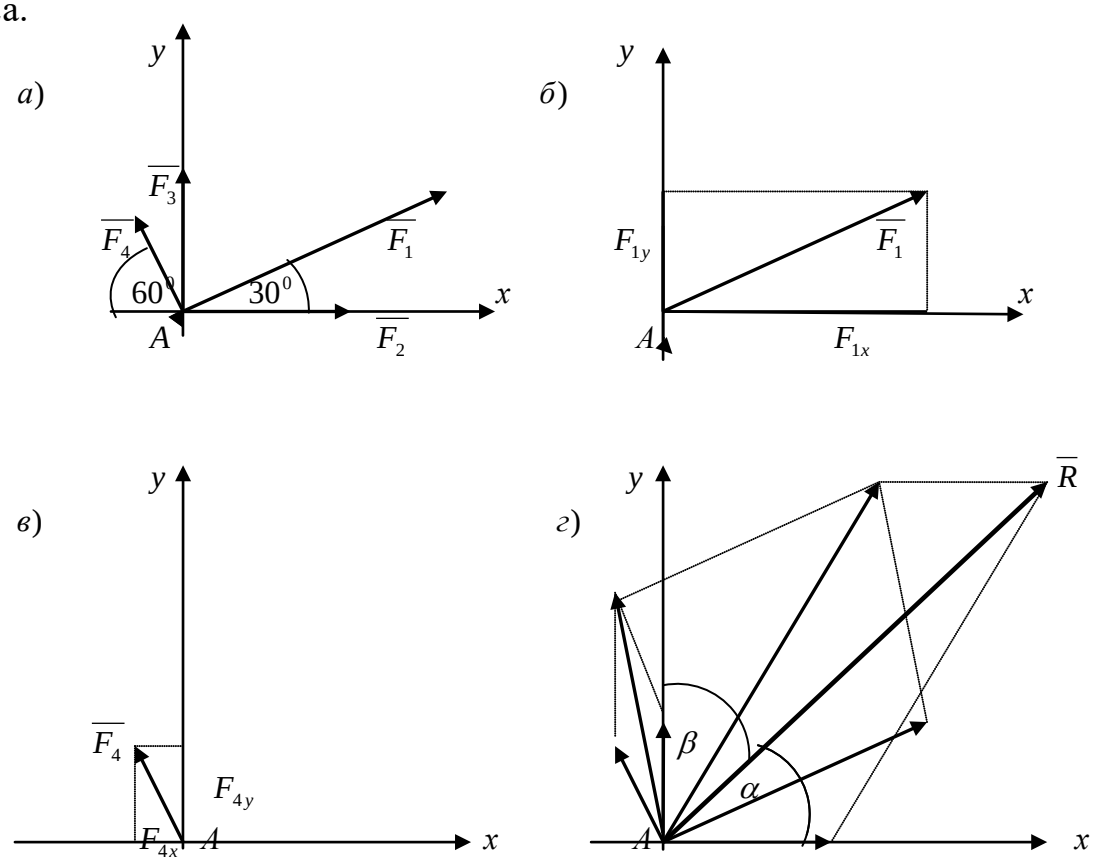


Рис. 2

<u>*Решение*</u> (метод проекций)

Изображаем на рисунке четыре данные силы и выбираем расположение осей координат. В данном случае удобно начало координат поместить в точку A, а оси совместить с силами $\overline{F_2}$ и $\overline{F_3}$ (рис.2а).

Находим проекции данных сил на ось Ax:

$$F_{1x}=F_1\cos 30^0,\quad F_{2x}=F_2,\quad F_{3x}=0,\quad F_{4x}=-F_4\cos 60^0$$

Находим проекции данных сил на ось Ay:

$$F_{1y}=F_1\sin 30^0,\quad F_{2y}=0,\quad F_{3y}=F_3,\quad F_{4y}=F_4\sin 60^0\,.$$

Находим проекции равнодействующей $\overline{R}$ на оси Ax и Ay:

$$R_x = \sum_{k=1}^{4} F_{kx} = F_1 \cos 30^0 + F_2 + 0 - F_4 \cos 60^0 = 18 \cdot 0{,}866 + 10 - 8 \cdot 0{,}5 = 21{,}588 кн.$$

$$R_y = \sum_{k=1}^{4} F_{ky} = F_1 \sin 30^0 + 0 + F_3 + F_4 \sin 60^0 = 18 \cdot 0{,}5 + 6 + 8 \cdot 0{,}866 = 21{,}88 кн.$$

Проекции равнодействующей на оси Ax и Ay получились положительными. Значит вектор $\overline{R}$, заменяющий действие четырёх данных сил и приложенный к точке A, должен быть направлен относительно оси Ay вверх, а относительно оси Ax - вправо. Положение равнодействующей $\overline{R}$ показано на рис.2г.

Находим модуль равнодействующей:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{21{,}588^2 + 21{,}88^2} = 30{,}737 кн.$$

Находим угол β, определяющий направление $\overline{R}$ относительно оси Ay:

$$\cos\beta = \frac{R_y}{R} = \frac{21{,}88}{30{,}7{,}37} = 0{,}712 \quad \rightarrow \quad \beta = 44{,}6^0.$$

Аналогично находим угол α:

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{21{,}588}{30{,}737} = 0{,}702 \quad \rightarrow \quad \alpha = 45{,}4^0.$$

Таким образом, равнодействующая четырёх заданных сил равна $30{,}737 кн$, направлена под углом $44{,}6^0$ к положительному направлению оси Ay и под углом $45{,}4^0$ к положительному направлению оси Ax.

2. Условия равновесия плоской произвольной система сил.

Алгебраическим моментом $M_O(\overline{F})$ силы $\overline{F}$ относительно центра O называется величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на длину плеча.

Плечом силы $\overline{F}$ относительно центра O называется длина h перпендикуляра, опущенного из центра O на линию действия силы.

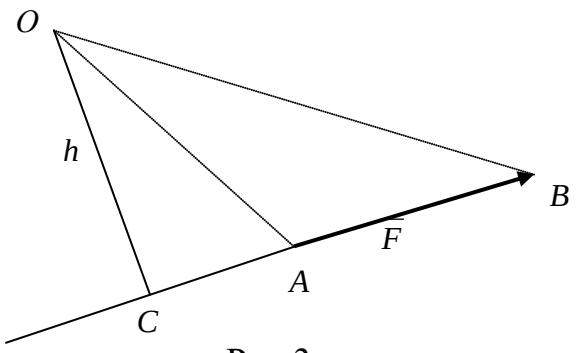


Рис.3.

Момент имеет знак плюс, если сила стремится повернуть тело вокруг центра O против хода часовой стрелки (как на рис.3, здесь $M_O(\overline{F}) = +Fh$), и знак минус, если по ходу часовой стрелки.

Сложение сил, расположенных как угодно на плоскости, можно выполнить приведением данной системы сил к произвольно выбранному центру.

Если задана плоская система сил $(\overline{F_1}, \overline{F_2}, ..., \overline{F_n})$, расположенных как угодно на плоскости, то, перенеся все эти силы в произвольную точку O, называемую *центром приведения*, получим приложенную в этом центре силу $\overline{R}$ и пару сил с алгебраическим моментом M_O.

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F_k}, \qquad M_O = \sum_{k=1}^{n} M_O(\overline{F_k})$$

Геометрическая сумма сил данной системы называется *главным вектором* этой системы сил.

Алгебраическая сумма моментов сил плоской системы относительно какой-нибудь точки O называется *главным моментом* системы сил относительно этой точки O.

Для равновесия плоской системы сил, приложенных к твёрдому телу и непересекающихся в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор $\overline{R}$ этих сил и их главный момент M_O относительно произвольной точки O, лежащей в плоскости действия этих сил, были равны нулю, т.е.

$$\overline{R} = 0, \quad M_O = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_O(\overline{F}_k) = 0 \qquad (1)$$

Эти условия дают три скалярных *уравнения равновесия*:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_O(\overline{F}_k) = 0 \qquad (2)$$

Если на тело действует система параллельных сил, то уравнений равновесия получится только два – уравнение проекций на ось, параллельную силам, и уравнение моментов.

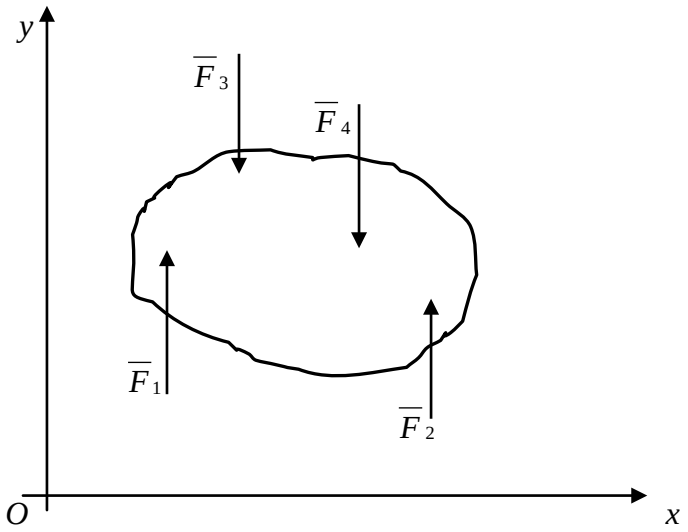


Рис.4.

В данном случае

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_O(\overline{F}_k) = 0 \qquad (3)$$

При решении некоторых задач одно или оба уравнения проекций целесообразно заменить уравнениями моментов относительно каких-либо точек, т.е. систему уравнений равновесия можно представить в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\overline{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_B(\overline{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \qquad (4)$$

или в виде

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\overline{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_B(\overline{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_C(\overline{F}_k) = 0. \qquad (5)$$

В первом случае линия, проходящая через точки A и B, не перпендикулярна к оси Ox. Во втором случае точки A, B, C не лежат на одной прямой линии.

Для системы параллельных сил вместо системы (3) можно записать два уравнения моментов:

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\overline{F}_k) = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_B(\overline{F}_k) = 0$$

В этом случае обе точки A и B не лежат на прямой, параллельной силам.

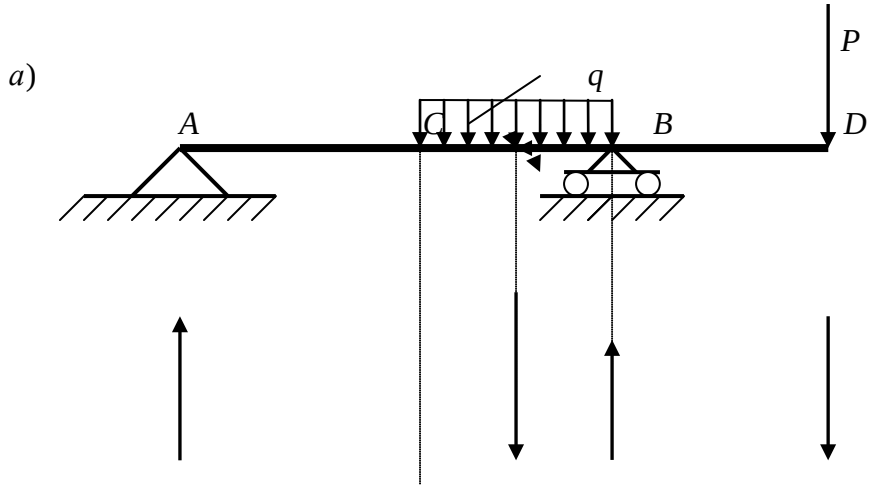
Ограничения, накладываемые на свободу перемещения тел и сохраняющиеся при любых прилагаемых к ним силам, называются *связями*, наложенными на эти тела. Согласно аксиоме освобождаемости от связей эффект от действия связей на твёрдое тело такой же, как и от действия определённых дополнительных сил, которые могут быть приложены к нему вместо связей. Силы, выражающие только действие связей, называются *силами реакций связей (реакциями связей)*

Заданные силы и силы реакций связей, действующие на твёрдое тело, образуют некоторую систему сил, удовлетворяющую условиям равновесия (2).

Как правило, искомыми величинами в задачах статики являются *реакции связей.* Для каждой искомой реакции связи обычно необходимо знать её направление и числовое значение. Направление реакций *идеальных связей* (связей без трения) определяются в зависимости от вида связей.

Пример 2. На консольную балку, имеющую в точке A шарнирно - неподвижную, в точке B шарнирно – подвижную опору, действуют две нагрузки: в точке D - сосредоточенная нагрузка $P = 8кн$, а на участке CB - равномерно распределённая нагрузка интенсивностью $q = 2кн/м$ (т.е. сила, приходящаяся на единицу длины).

Определить реакции опор.



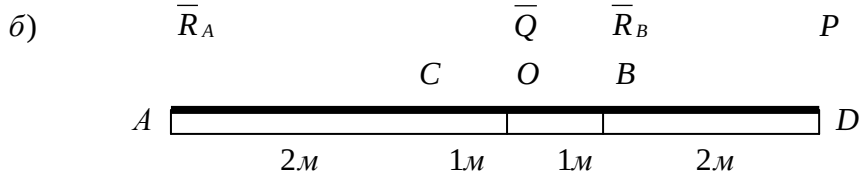


Рис. 5.

Решение.

1) Рассмотрим равновесие балки AD, на которую в точке D действует вертикальная сила $\overline{P}$, а на участке CB действует равномерно распределённая нагрузка, интенсивность которой равна q. Полная величина этой нагрузки (её равнодействующая) $Q = q \cdot CB = 4кн.$, и приложена она в точке O - середине участка CB, т.е. $CO = OB$.

2) Реакция $\overline{R}_B$ подвижного шарнира в точке B направлена вертикально (перпендикулярно опорной поверхности), следовательно, на балку действует система параллельных сил. Поэтому реакция $\overline{R}_A$ шарнирно неподвижной опоры в точке A будет также направлена вертикально (рис.5б).

3) Составим уравнения равновесия вида (6), приняв для одного уравнения за центр моментов точку A, для другого – точку B.

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\overline{F}_k) = 0 \quad \rightarrow \quad -3Q + 4R_B - 6P = 0 \quad \rightarrow \quad R_B = 15кн.$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_B(\overline{F}_k) = 0 \quad \rightarrow \quad -4R_A + 1Q - 2P = 0 \quad \rightarrow \quad R_A = -3кн.$$

Отрицательное значение реакции R_A означает, что она направлена вниз, а не вверх, как показано на рис.5б.

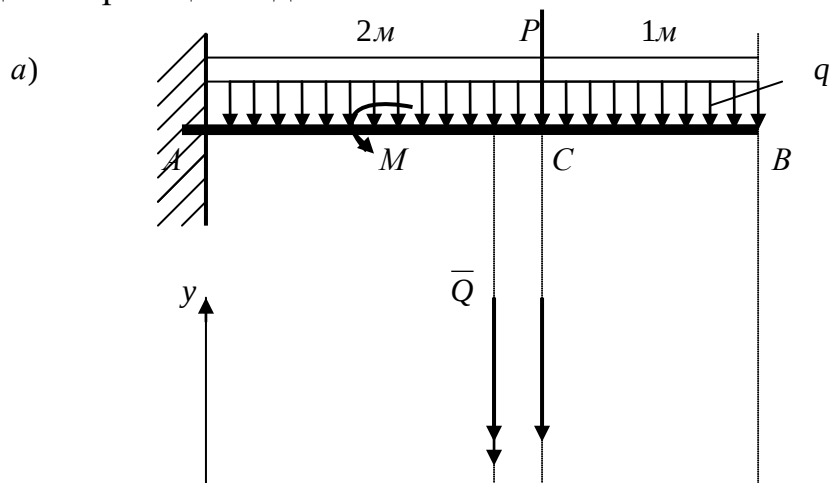
Таким образом, реакция неподвижного шарнира в точке A равна $R_A = -3кн$ и направлена вертикально вниз; реакция подвижного шарнира в точке B равна $R_B = 15кн$ и направлена вертикально вверх.

4) Для проверки решения можно использовать уравнение проекций на вертикальную ось:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \quad \rightarrow \quad R_A - Q + R_B - P = 0 \quad \rightarrow \quad -3 - 4 + 15 - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 0.$$

Пример 3. Жёстко заделанная у левого конца консольная балка AB (рис.6a) нагружена равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью $q = 5кн/м$, сосредоточенной силой $P = 12кн$ и парой сил с моментом $M = 20кнм$.

Определить реакции заделки.



б)

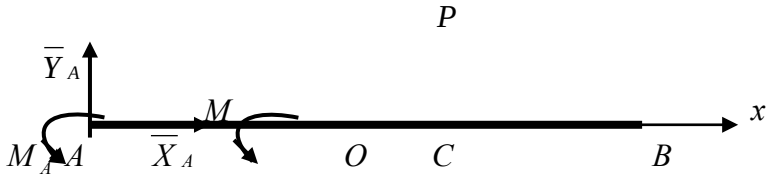


Рис. 6.

<u>*Решение.*</u>

1) На балку действуют три нагрузки: в точке C - вертикальная сосредоточенная сила $\overline{P}$, по всей длине балки – равномерно распределённая нагрузка, которую заменим эквивалентной ей сосредоточенной силой $\overline{Q}$, приложенной в точке O, и модуль которой равен:

$$Q = q \cdot AB = 5 \cdot 3 = 15кн.$$

Правый конец балки нагружён парой сил, момент которой M действует против хода часовой стрелки.

2) Равновесие балки обеспечивается жёсткой заделкой в точке A.

Освободим балку от связи, заменив её действие силой – реакцией связи $\overline{R}_A$ и моментом заделки M_A. Заменим реакцию $\overline{R}_A$ её составляющими $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$, совместив их с осями Ax и Ay соответственно (см. рис. 6*б*); обе эти составляющие пока неизвестны, так как неизвестно направление реакции $\overline{R}_A$.

3) Составим уравнения равновесия – уравнения проекции на оси Ax и Ay и уравнение моментов относительно точки A.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \quad \rightarrow \quad X_A = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \quad \rightarrow \quad Y_A - Q - P = 0 \quad \rightarrow \quad Y_A = 15 + 12 = 27;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\overline{F}_k) = 0 \quad \rightarrow \quad M_A + M - 1{,}5 \cdot Q - 2 \cdot P = 0 \quad \rightarrow \quad M_A = -20 + 1{,}5 \cdot 15 + 12 \cdot 2 = 26{,}5$$

4) Из первого уравнения следует, что горизонтальная составляющая реакции заделки $\overline{R}_A$ равна нулю – в данном случае нет усилий, смещающих балку в горизонтальном направлении.

Из второго уравнения, с учётом $X_A = 0$, следует $R_A = Y_A = 27кн$.

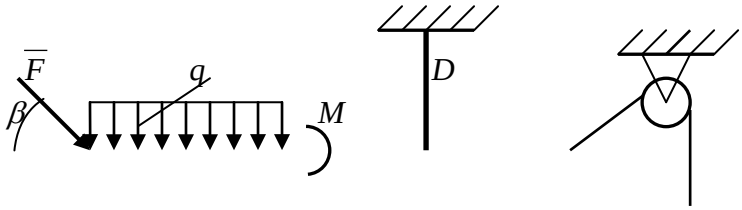
Из третьего уравнения $M_A = 26{,}5кнм$.

Для проверки правильности решения можно составить уравнения моментов относительно либо точки C, либо точки B:

$$\sum_{k=1}^{n} M_C(\overline{F}_k) = 0 \quad \rightarrow \quad M_A + M - 2 \cdot Y_A + 0{,}5 \cdot Q = 0 \quad \rightarrow \quad 26{,}5 + 20 - 2 \cdot 27 + 15 \cdot 0{,}5 = 0.$$

Пример 4. Для конструкции, изображённой на рис 7, определить реакцию опоры A и реакцию стержня CD.

а)



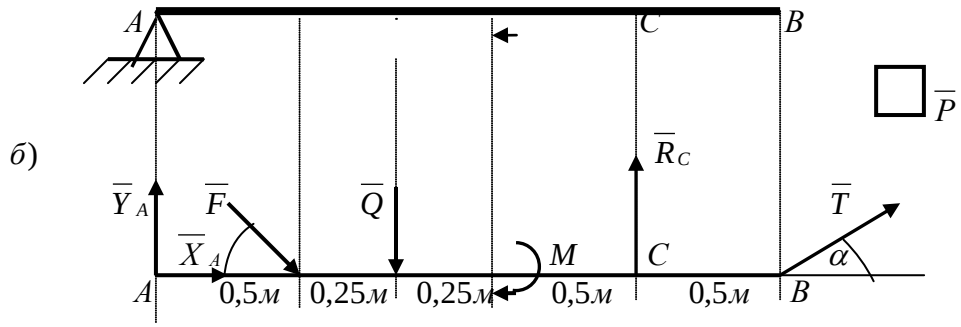


Рис.7.

Дано: $F = 10кн,\ P = 5кн,\ M = 8кнм,\ q = 2кн/м,\ \alpha = 30^0,\ \beta = 60^0$.

Решение.

1) Рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных к балке AB. Равномерно распределённую нагрузку интенсивностью q, заменяем сосредоточенной силой $\overline{Q}$, модуль которой $Q = 2 \cdot 0{,}5 = 1кн$ и приложенной в центре тяжести эпюры этой нагрузки.

2) Отбрасываем связи: шарнирно- неподвижную опору A, стержень CD и нить. Действие связей на балку заменяем их реакциями (рис. 7*б*). Так как направление реакции шарнирно-неподвижной опоры A неизвестно, то определяем её составляющие $\overline{X}_A, \overline{Y}_A$. Реакция $\overline{R}_C$ стержня и реакция $\overline{T}$ нити направлены соответственно по стержню и по нити, причём модуль реакции $\overline{T}$ равен P $(T = P)$.

3) Для плоской системы сил, приложенной к балке, составляем три уравнения равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \quad \rightarrow \quad X_A + F\cos 60^0 + T\cos 30^0 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \quad \rightarrow \quad Y_A - F\sin 60^0 - Q + R_C + T\sin 30^0 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\overline{F}_k) = 0 \quad \rightarrow \quad -M - F\sin 60^0 \cdot 0{,}5 - Q \cdot 0{,}75 + R_C \cdot 1{,}5 + T\sin 30^0 \cdot 2 = 0.$$

4) Из третьего уравнения полученной системы найдём:

$$R_C = (F\sin 60^0 \cdot 0{,}5 + Q \cdot 0{,}75 - T\sin 30^0 \cdot 2 + M)/1{,}5 = 5{,}387кн.$$

Из второго уравнения системы найдём:

$$Y_A = F\sin 60^0 + Q - R_C - T\sin 30^0 = 1{,}773кн.$$

Из первого уравнения системы найдём:

$$X_A = -F\cos 60^0 - T\cos 30^0 = -9{,}33кн.$$

Значение X_A получилось отрицательным; это указывает на то, что действительное направление $\overline{X}_A$ противоположно принятому на схеме 14*б* направлению.

5) Для проверки составим уравнение моментов относительно точки B.

$$\sum_{k=1}^{n} M_B(\overline{F}_k) = 0 \quad \rightarrow \quad -M + F\sin 60^0 \cdot 1{,}5 + Q \cdot 1{,}25 - R_C \cdot 0{,}5 - Y_A \cdot 2 =$$

$$= -5{,}387 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 1{,}25 + 10 \cdot 0{,}866 \cdot 1{,}5 - 1{,}773 \cdot 2 - 8 \approx 0.$$

Пример 5. Рассмотрим равновесие сочленённой системы, изображённой на рис. 8. Система состоит из двух невесомых, шарнирно-соединённых в точке C стержней. На стержень BC действует пара сил с моментом $M = 4кнм$ и в точке D – сосредоточенная сила $F = 10кн.$ На стержень AC действует равномерно распределённая нагрузка интенсивности $q = 2кн./м.$

Требуется определить реакции связей и давление в соединительном шарнире C.

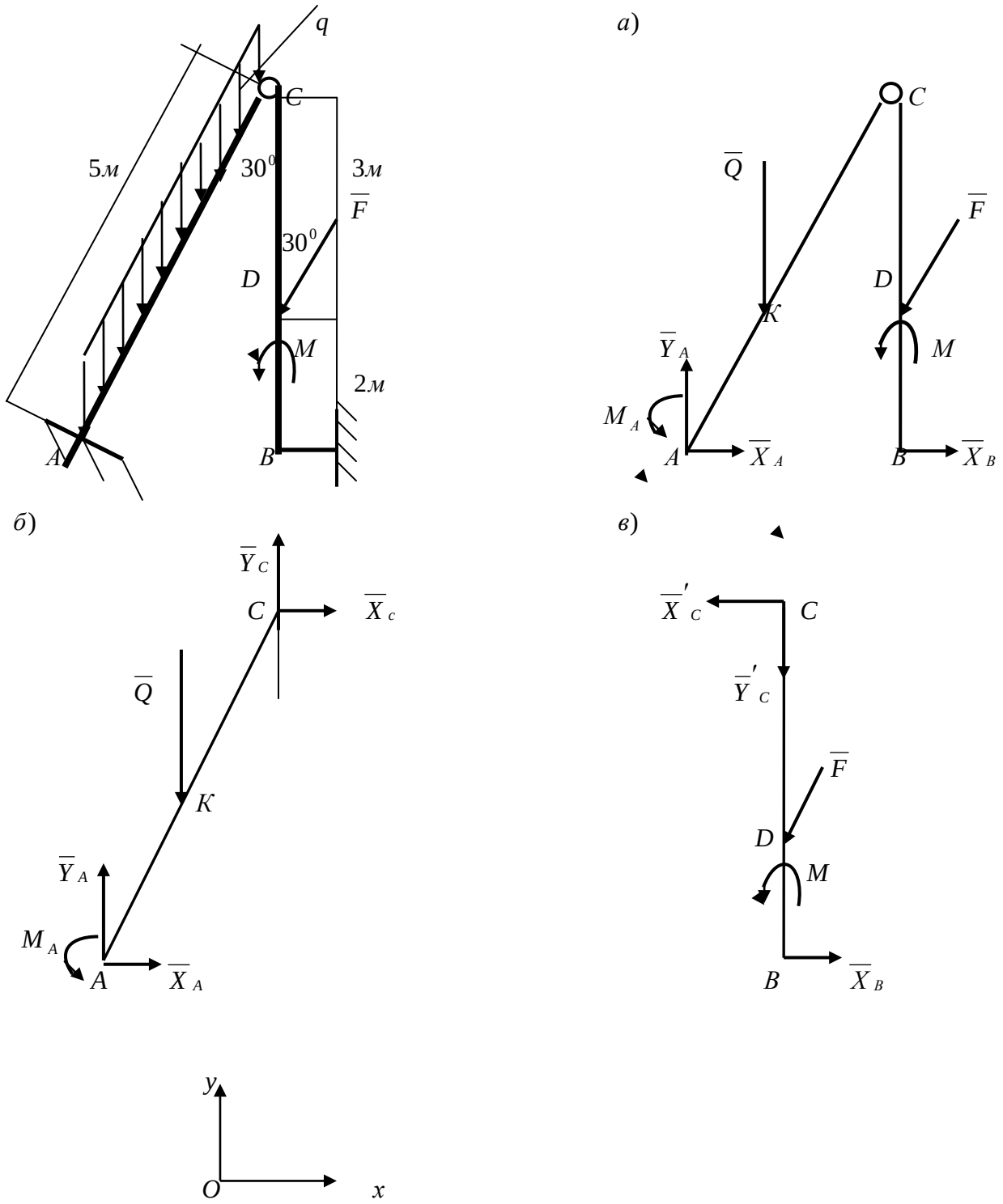


Рис. 8.

Решение.

1) Действие равномерно-распределённой нагрузки эквивалентно действию одной сосредоточенной силы, модуль которой $Q = q \cdot AC = 2 \cdot 5 = 10кн$, и проходящей через точку K в середине отрезка AC в направлении распределённых сил.

2) На систему наложены две связи: в точке A - жёсткая заделка; в точке B - стержневая шарнирная опора.

Освобождая систему от стержневой шарнирной опоры, в точке B приложим силу реакции $\overline{X}_B$, направленную вдоль стержневой опоры (предполагая, что стержень растянут).

Освобождая систему от жёсткой заделки, приложим в точке A силу реакции $\overline{R}_A$ и пару сил с моментом M_A. Величины и направления силы реакции $\overline{R}_A$ и момента заделки M_A неизвестны, поэтому, выбрав направление осей декартовой системы координат, представим неизвестную силу реакции в точке A двумя взаимно перпендикулярными, направленными в положительную сторону соответствующих координатных осей:

$$\overline{R}_A = \overline{X}_A + \overline{Y}_A, \text{ где } \overline{X}_A = X_A \cdot \overline{i}, \quad \overline{Y}_A = Y_A \cdot \overline{j}; \quad R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}.$$

Неизвестный момент заделки обозначим круговой стрелкой, направленной также в положительную сторону (против хода часовой стрелки).

Теперь сочленённую систему (рис.8*а*) можно рассматривать, как свободное твёрдое тело, находящееся в равновесии под действием заданных сил и неизвестных сил реакций связей X_A, Y_A, X_B и неизвестного момента M_A.

Для данной системы можем составить три уравнения равновесия. В трёх уравнениях четыре неизвестных. Но это обстоятельство не делает систему статистически неопределённой. Можно расчленить систему по шарниру C на отдельные твёрдые тела: наклонный стержень AC и вертикальный BC.

3) Рассмотрим равновесие стержня AC (рис.8*б*). На стержень AC действует заданная сила $\overline{Q}$ и реакции связей. Действие шарнира C представим двумя составляющими силами $\overline{X}_C$ и $\overline{Y}_C$. Составим уравнения равновесия плоской произвольной системы сил, действующей на стержень AC:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \quad \rightarrow \quad X_A + X_C = 0; \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \quad \rightarrow \quad Y_A + Y_C - Q = 0; \tag{7}$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\overline{F}_k) = 0 \quad \rightarrow \quad -X_C \cdot AC \cdot \cos 30^0 + Y_C \cdot AC \cdot \sin 30^0 + M_A - Q \cdot \frac{AC}{2} \cdot \cos 60^0 = 0. \tag{8}$$

Рассмотрим равновесие стержня BC (рис.8*в*). На стержень действуют: пара сил с моментом M, сила $\overline{F}$, реакция шарнирного стержня $\overline{X}_A$; действие шарнира C представим двумя составляющими $\overline{X}_C{}'$ и $\overline{Y}_C{}'$. На основании аксиомы равенства действия и противодействия составляющие $\overline{X}_C{}'$ и $\overline{Y}_C{}'$

равны по модулю и направлены прямо противоположно соответствующим составляющим реакции $\overline{X}_C$ и $\overline{Y}_C$, приложенных к стержню AC, то есть

$$\overline{X}_C = -\overline{X}_C{}', \quad \overline{Y}_C = -\overline{Y}_C{}' \quad \text{и} \quad X_C = X_C{}', \quad Y_C = Y_C{}' \tag{9}$$

Составим уравнения равновесия плоской системы сил, действующей на стержень BC:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{rx} = 0 \quad \rightarrow \quad X_B - X_C{}' - F\sin 30^0 = 0 \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \quad \rightarrow \quad -Y_C{}' - F\sin 60^0 = 0 \tag{11}$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_C(\overline{F}_k) = 0 \quad \rightarrow \quad X_B \cdot BC + M - F \cdot CD \cdot \sin 30^0 = 0 \tag{12}$$

Решая совместно систему уравнений $(6)-(12)$, находим значения искомых величин:

$X_A = 2{,}8кн$, $Y_A = 18{,}66кн$, $M_A = 22{,}026кнм$, $X_C = -2{,}8кн$, $Y_C = -8{,}66кн$ $X_B = 2{,}2кн.$

Для проверки правильности решения можно использовать любое уравнение равновесия для всей системы в целом, например,

$$\sum_{k=1}^{n} M_B(\overline{F}_k) = 0 \quad \rightarrow$$

$$M + F \cdot BD\cos 60^0 + Q \cdot CK\sin 30^0 - Y_A \cdot AC\sin 30^0 + M_a - X_A(AC - AC\cos 30^0) = 0.$$

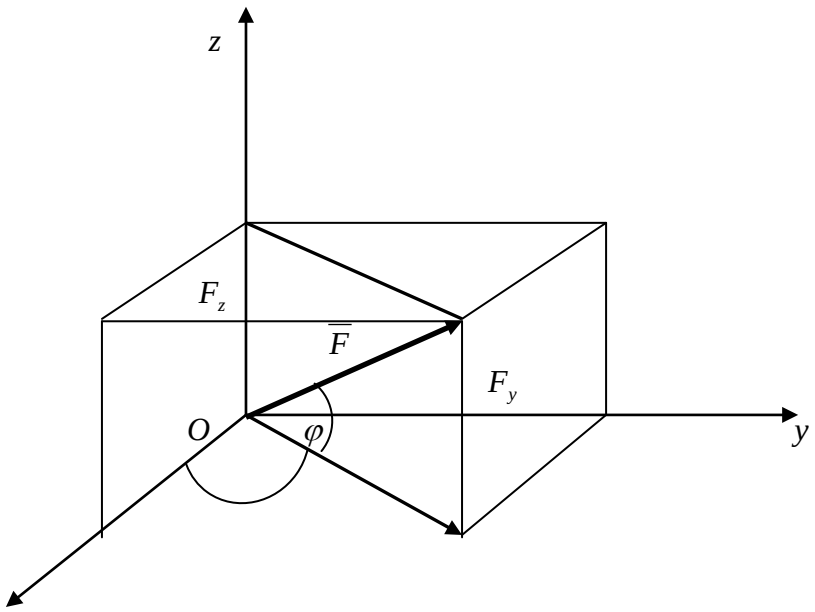
$$4 + 10 + 12{,}5 - 18{,}66 \cdot 2{,}5 - 2{,}8 \cdot 0{,}67 + 22{,}026 = 0$$

$$48{,}526 - 48{,}526 \equiv 0$$

Знак «-» в выражениях для X_C и Y_C показывает, что силы $\overline{X}_C$ и $\overline{Y}_C$ имеют направления противоположные показанным на рис. $8б$.

3. Определение главного вектора пространственной системы сил.

Если требуется определить проекции силы $\overline{F}$ на три взаимно перпендикулярные оси, то обычно силу проецируют сначала на одну из плоскостей (например, горизонтальную), а уже затем на оси, расположенные в этой плоскости. При этом надо обратить внимание на то, что в отличие от проекций силы на оси, являющихся скалярами, проекция силы на плоскость ($\overline{F}_{xy}$ на рис. 9) - величина векторная.



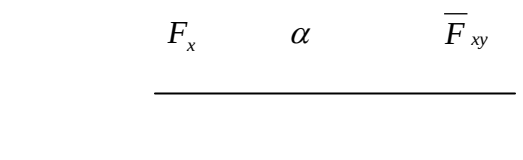


Рис. 9.

При помощи проекций сил на оси легко определить главный вектор системы сил, приложенных к точке. Для этого необходимо:

1) Выбрать расположение осей так, чтобы проекции всех сил определились простейшим образом.
2) Найти проекции всех сил на каждую из осей.
3) Сложить проекции всех сил на каждую из осей, и найти таким образом три проекции главного вектора на оси:

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}, \quad R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}, \quad R_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}.$$

4) Определить модуль главного вектора:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

5) Определить направление главного вектора, найдя направляющие косинусы:

$$\cos(\overline{R}, \overline{i}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\overline{R}, \overline{j}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(\overline{R}, \overline{k}) = \frac{R_z}{R}.$$

Пример 6. На одну из вершин куба действуют пять сил таким образом, что три силы направлены вдоль рёбер, сходящихся в этой вершине, четвёртая сила направлена по диагонали грани, а пятая сила – вдоль диагонали самого куба. Определить главный вектор этих сил, считая, что численно они равны между собой.

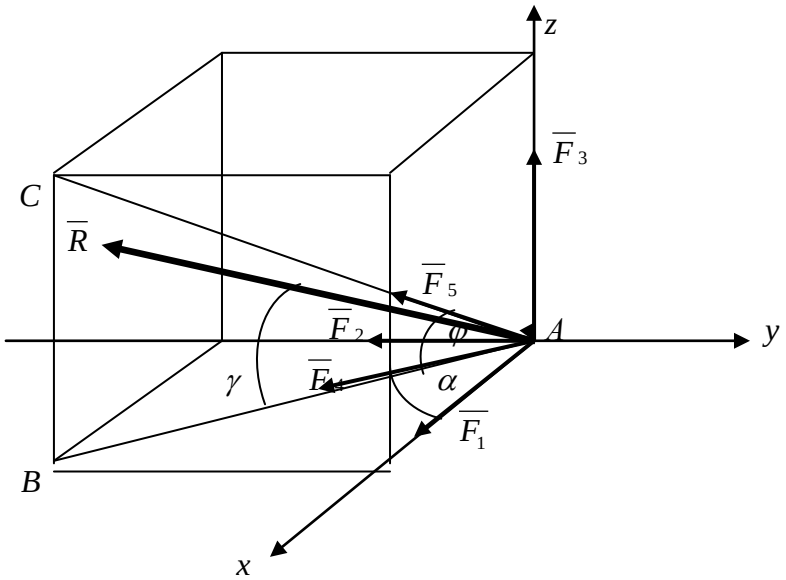


Рис. 10.

<u>*Решение.*</u>

1) Пусть A вершина куба, в которой приложены силы: $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$ - действуют вдоль рёбер куба, сила $\overline{F}_4$ - вдоль диагонали AB нижней грани и сила $\overline{F}_5$ - вдоль диагонали AC куба (рис.10). По условию модули сил равны, и примем

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F$$

2) Ось Ox совместим с ребром куба, вдоль которого действует сила $\overline{F}_1$, ось Oy - с ребром, вдоль которого действует сила $\overline{F}_2$.

3) Найдём проекции сил на каждую из осей: $F_{1x} = F_1,\ F_{1y} = F_{1z} = 0$;

$F_{2y} = -F_2,\ F_{2x} = F_{2z} = 0$; $F_{3z} = F_3,\ F_{3x} = F_{3y} = 0$; $F_{4x} = F_4 \cos\alpha,\ F_{4y} = -F_4 \sin\alpha,\ F_{4z} = 0$;

$F_{5x} = F_5 \cos\varphi \cos\alpha,\ F_{5y} = -F_5 \cos\varphi \sin\alpha,\ F_{5z} = F_5 \sin\varphi.$

4) Сложим проекции на каждую ось и найдём проекции главного вектора, учитывая, что модули всех сил равны между собой и что $\alpha = 45^0$

$\cos\alpha = \sin\alpha \approx 0{,}707$; $\cos\varphi = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\sqrt{a^2 + a^2}}{\sqrt{a^2 + a^2 + a^2}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} \approx 0{,}816,$

$\sin\varphi = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + a^2 + a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577,$ где a - длина ребра куба, отсюда $\varphi = 35{,}31^0$

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = F_1 + F_4 \cos\alpha + F_5 \cos\varphi \cos\alpha = F + 0{,}707 \cdot F + 0{,}816 \cdot 0{,}707 \cdot F \approx 2{,}284 \cdot F\ ,$$

$$R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = -F_2 - F_4 \sin\alpha - F_5 \cos\varphi \sin\alpha = -F - 0{,}707 \cdot F - 0{,}816 \cdot 0{,}707 \cdot F \approx -2{,}284 \cdot F\ ,$$

$$R_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = F_3 + F_5 \sin\varphi = F + 0{,}577 \cdot F \approx 1{,}577 \cdot F\ .$$

Как видно, проекции главного вектора на оси Ox и Оу по модулю равны между собой.

5) Определим модуль главного вектора

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(2{,}284)^2 + (-2{,}284^2 + (1{,}577)^2} = 3{,}594 \cdot F$$

6) Так как силы расположены симметрично относительно диагональной плоскости куба, то линия действия главного вектора находится в плоскости симметрии расположения сил, проходящей через ось Oz. Угол γ линии действия $\overline{R}$ с осью Oz:

$$\sin\gamma = \frac{R_z}{R} \approx \frac{1{,}577R}{3{,}594R} \approx 0{,}439 \quad \rightarrow \quad \gamma = 26{,}04^0.$$

4. Определение главного момента пространственной системы сил.

Векторный момент $\overline{M}_O(\overline{F})$ *силы* $\overline{F}$ *относительно точки* O определяется как векторное произведение:

$$\overline{M}_O(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F}\ ,$$

где $\overline{r}$ - радиус-вектор, проведённый из точки O в точку приложения силы.

Таким образом, вектор $\overline{M}_O(\overline{F})$ направлен перпендикулярно плоскости, содержащей линию действия силы и точку O, так что с конца его поворот плоскости силой виден против хода часовой стрелки (рис.11).

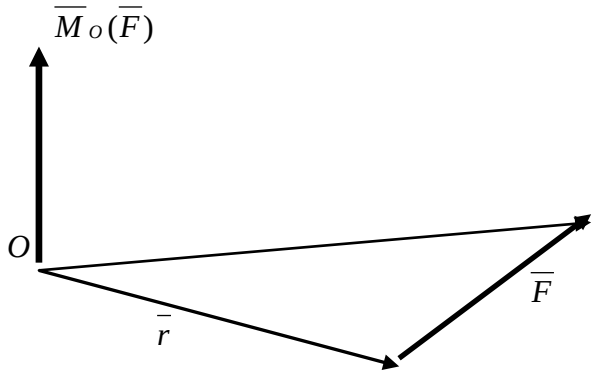


Рис.11

Момент силы относительно оси Oz определяется как скалярная величина, модуль которой равен произведению модуля проекции силы $\overline{F}_p$ на плоскость P, перпендикулярную к оси Oz на расстояние h от точки O (пересечение оси с этой плоскостью) до линии действия проекции силы на плоскость P:

$$M_z(\overline{F}) = \overline{M}_O(\overline{F}_P) = F_P \cdot h .$$

Если с конца оси Oz видно, что сила $\overline{F}_P$ стремится повернуть тело вокруг точки O против часовой стрелки, то момент положительный, если – по часовой стрелке, то отрицательный. Момент силы, изображённый на рис.12 положительный.

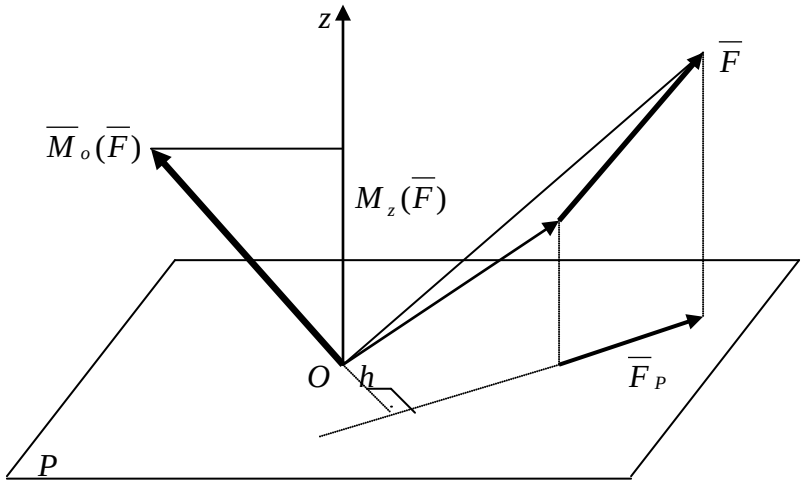


Рис.12

Если точка лежит на оси, то момент силы относительно оси равен проекции векторного момента относительно точки на эту ось, то есть

$$np_z \overline{M}_O(\overline{F}) = M_z(\overline{F})$$

Зная моменты силы относительно осей координат M_x, M_y, M_z, можно определить величину момента силы $\overline{M}_O(\overline{F})$ относительно начала координат O и его направляющие косинусы по формулам:

$$M_O(\overline{F}) = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}\,,$$

$$\cos(\overline{M}_O(\overline{F}), \overline{i}) = \frac{M_x}{M_O(\overline{F})}, \quad \cos(\overline{M}_O(\overline{F}), (\overline{j})) = \frac{M_y}{M_O(\overline{F})}, \quad \cos(\overline{M}_O(\overline{F}), \overline{k}) = \frac{M_z}{M_O(\overline{F})}.$$

Момент силы относительно оси равен нулю, если линия действия силы и ось лежат в одной плоскости, то есть если

а) сила параллельна оси (при этом проекция $\overline{F}_P$ силы $\overline{F}$ на перпендикулярную к оси плоскость P обращается в нуль);

б) линия действия силы пересекает ось (при этом плечо $h = 0$)

В случае пространственной системы сил *главным векторным моментом системы относительно точки* называется сумма векторных моментов всех сил системы относительно той же точки:

$$\overline{L}_O = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_O(\overline{F}_k).$$

Главным моментом пространственной системы сил относительно оси Oz называется сумма моментов всех сил системы относительно этой оси:

$$L_z = L_{Oz} = \sum_{k=1}^{n} M_z(\overline{F}_k)$$

Зная главные моменты системы сил относительно осей декартовых координат, можно определить модуль главного векторного момента относительно начала координат O и его направляющие косинусы:

$$L_O = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} = \sqrt{(\sum_{k=1}^{n} M_x(\overline{F}_k))^2 + (\sum_{k=1}^{n} M_y(\overline{F}_k))^2 + (\sum_{k=1}^{n} M_z(\overline{F}_k))^2}$$

$$\cos(\overline{L}_O, \overline{i}) = \frac{L_x}{L_O}, \quad \cos(\overline{L}_O, \overline{j}) = \frac{L_y}{L_O}, \quad \cos(\overline{L}_o, \overline{k}) = \frac{L_z}{L_O}.$$

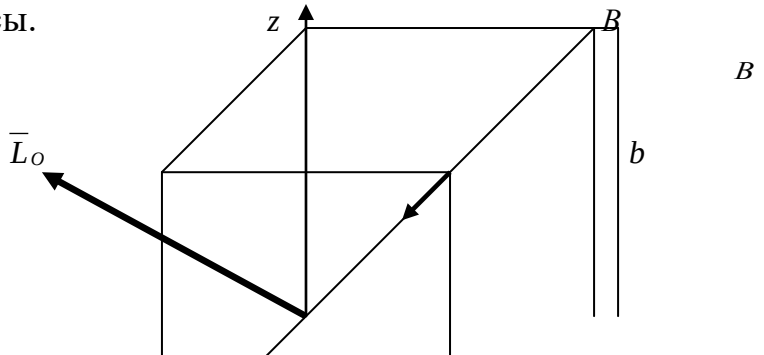
Если пространственная система сил приводится к равнодействующей, то согласно теореме Вариньона момент равнодействующей силы относительно точки равен векторной сумме всех сил системы относительно той же точки:

$$\overline{M}_O(\overline{R}) = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_O(\overline{F}_k), \text{ где } \overline{R} \sim (\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n)$$

Та же теорема даёт следующий результат: момент равнодействующей силы относительно оси равен сумме моментов составляющих сил относительно той же оси:

$$\overline{M}_z(\overline{R}) = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_z(\overline{F}_k), \text{ где } \overline{R} \sim (\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n)$$

Пример 7. Дана система сил $F_1 = 10н$, $F_2 = 15н$, $F_3 = 20н$, $F_4 = 12н$, действующих как показано на рис.13. Стороны $a = 30см, b = 50см, c = 40см$. Определить модуль векторного момента относительно начала координат O и его направляющие косинусы.



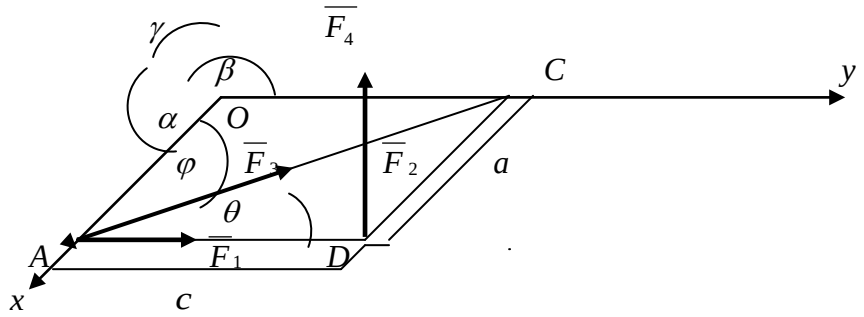


Рис 13.

Решение.

Вычислим :

$$\cos\theta = \frac{AD}{AC}, \quad AC = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = 50 \quad \rightarrow \quad \cos\theta = \frac{40}{50} = 0{,}8; \quad \sin\theta = \frac{DC}{AC} = 0{,}6$$

Так как $AC = BC = 50$, то $\cos\varphi = \sin\varphi = 0{,}707$ и $\varphi = 45^0$.

Составим таблицу

Таблица 1.

	$\overline{F}_1$	$\overline{F}_2$	$\overline{F}_3$	$\overline{F}_4$
M_x	0	$F_2 \cdot c$	0	0
M_y	0	$-F_2 \cdot a$	0	$F_4 \cdot b \cdot \cos\varphi \sin\theta$
M_z	$F_1 \cdot a$	0	$F_3 \cdot a \cos\theta$	$-F_4 \cdot c \cdot \cos\varphi \sin\theta$

Главные моменты системы сил относительно координатных осей:

$$L_x = \sum_{k=1}^{n} M_x(\overline{F}_k) = F_2 \cdot c = 15 \cdot 0{,}4 = 6 нм,$$

$$L_y = \sum_{k=1}^{n} M_y(\overline{F}_k) = -F_2 \cdot a + F_4 \cdot b \cdot \cos\varphi \sin\theta = -15 \cdot 0{,}3 + 12 \cdot 0{,}707 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 = -1{,}955 нм,$$

$$L_z = \sum M_z(\overline{F}_k) = F_1 \cdot a + F_3 \cdot a \cdot \cos\theta - F_4 \cdot c \cdot \cos\varphi \sin\theta =$$

$$= 10 \cdot 0{,}3 + 20 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 - 12 \cdot 0{,}707 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 5{,}085 нм.$$

Модуль момента:

$$L_O = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} = \sqrt{6^2 + (-1{,}955)^2 + 5{,}085^2} = 8{,}1 нм.$$

Направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \cos(\overline{L}_O, \overline{i}) = \frac{L_x}{L_O} = \frac{6}{8{,}1} = 0{,}74 \quad \rightarrow \quad \alpha = 42{,}27^0;$$

$$\cos\beta = \cos(\overline{L}_O, \overline{j}) = \frac{L_y}{L_O} = \frac{-1{,}955}{8{,}1} = -0{,}24 \quad \rightarrow \quad \beta = 103{,}39^0;$$

$$\cos\gamma = \cos(\overline{L}_O, \overline{k}) = \frac{L_z}{L_O} = \frac{5{,}085}{8{,}1} = 0{,}62 \quad \rightarrow \quad \gamma = 51{,}68^0.$$

Контрольные задания

Задача 1. (рис. 2)

Определить равнодействующую четырёх сил: $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, $\mathbf{F_3}$, $\mathbf{F_4}$, приложенных к точке *A* и направленных, как показано на рис. 2а., где **α = 60°, β = 30°**

Таблица 1

Варианты заданий к задаче 1

N	α	β	F_1	F_2	F_3	F_4
1	30	45	1	2	3	4
2	30	60	5	6	7	8
3	45	30	2	3	4	5
4	60	45	8	6	4	2
5	30	60	3	5	7	1
6	45	45	4	7	6	2
7	60	60	3	5	7	3
8	30	30	5	8	3	1
9	45	60	6	2	1	7
10	30	60	5	8	2	10
11	60	45	3	7	1	8
12	30	45	10	5	3	6
13	45	60	2	6	7	8
14	60	30	5	2	8	10
15	45	30	9	4	6	2
16	30	60	3	5	2	7
17	45	45	6	3	9	1
18	30	30	8	3	2	6
19	60	45	9	7	5	3
20	30	45	6	3	9	1

Задача 2. (рис. 5)

На консольную балку, имеющую в точке *A* шарнирно - неподвижную опору и в точке *B* шарнирно – подвижную опору, действуют две нагрузки: в точке *D* - сосредоточенная нагрузка **P**, а на участке *CB* - равномерно распределённая нагрузка интенсивностью **q** (т.е. сила, приходящаяся на единицу длины).

Определить реакции опор.

Таблица 2

Варианты заданий к задаче 2

N	P	q	AC	CB	ВД
1	4	2	1	1	1
2	6	3	2	4	2
3	10	5	1	2	3
4	6	4	4	4	2
5	5	3	6	3	2

N	P	q	AC	CB	ВД
6	2	1	4	2	2
7	8	6	3	3	3
8	3	2	4	4	1
9	4	3	5	2	4
10	7	1	6	3	3
11	5	4	4	2	4
12	6	3	8	4	3
13	5	4	6	4	4
14	3	1	2	6	4
15	10	6	3	5	6
16	8	5	2	4	2
17	5	2	6	6	4
18	9	6	3	6	2
19	3	2	1	4	1
20	6	7	2	6	2

Задача 3. (рис. 6)

Жёстко заделанная у левого конца консольная балка AB (рис.6a) нагружена равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью **q**, сосредоточенной силой **P** и парой сил с моментом **M**.

Определить реакции заделки.

Таблица 3

Варианты заданий к задаче 3

N	P	q	AC	CB	M
1	4	2	1	1	10
2	6	3	2	4	12
3	10	5	1	2	8
4	6	4	4	4	2
5	5	3	6	2	6
6	2	1	4	2	3
7	8	6	3	3	6
8	3	2	4	1	5
9	4	3	5	4	7
10	7	1	6	3	5
11	5	4	4	4	8
12	6	3	8	3	2
13	5	4	6	4	8
14	3	1	2	4	7
15	10	6	3	6	5
16	8	5	2	2	6
17	5	2	6	4	2
18	9	6	3	2	4
19	3	2	1	1	5
20	6	7	2	2	3

Задача 4. (рис. 7)

Для конструкции, изображённой на рис. 7, *определить* реакцию опоры A и реакцию стержня CD.

Таблица 4

Варианты заданий к задаче 4

N	α	β	F	P	M	q
1	30	45	1	2	3	4
2	60	30	5	6	7	8
3	45	30	2	3	4	5
4	60	45	8	6	4	2
5	30	60	3	5	7	1
6	45	45	4	7	6	2
7	60	60	3	5	7	3
8	30	30	5	8	3	1
9	45	60	6	2	1	7
10	30	60	5	8	2	10
11	60	45	3	7	1	8
12	30	45	10	5	3	6
13	45	60	2	6	7	8
14	60	30	5	2	8	10
15	45	30	9	4	6	2
16	30	60	3	5	2	7
17	45	45	6	3	9	1
18	30	30	8	3	2	6
19	60	45	9	7	5	3
20	30	45	6	3	9	1

Задача 5. (рис. 8)

Рассмотрим равновесие сочленённой системы, изображённой на рис. 8. Система состоит из двух невесомых, шарнирно-соединённых в точке C стержней. На стержень BC действует пара сил с моментом **M** и в точке D – сосредоточенная сила **F**. На стержень AC действует равномерно распределённая нагрузка интенсивности **q**.

Определить реакции связей и давление в соединительном шарнире C.

Таблица 5

Варианты заданий к задаче 5

N	**P**	**q**	**AC**	**CB**	**M**
1	4	2	1	1	10
2	6	3	2	4	12
3	10	5	1	2	8
4	6	4	4	4	2
5	5	3	6	2	6
6	2	1	4	2	3
7	8	6	3	3	6

N	P	q	AC	CB	M
8	3	2	4	1	5
9	4	3	5	4	7
10	7	1	6	3	5
11	5	4	4	4	8
12	6	3	8	3	2
13	5	4	6	4	8
14	3	1	2	4	7
15	10	6	3	6	5
16	8	5	2	2	6
17	5	2	6	4	2
18	9	6	3	2	4
19	3	2	1	1	5
20	6	7	2	2	3

Задача 6. (рис. 13)

Дана система сил $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, $\mathbf{F_3}$, $\mathbf{F_4}$, действующих как показано на рис.13. Стороны **a**, **b**, **c**.

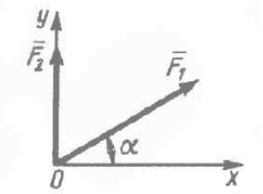
Определить модуль векторного момента относительно начала координат O и его направляющие косинусы.

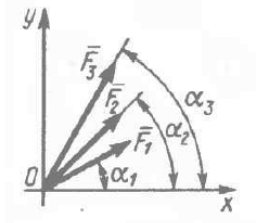
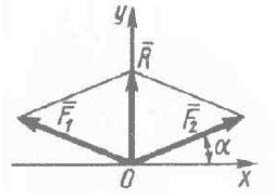
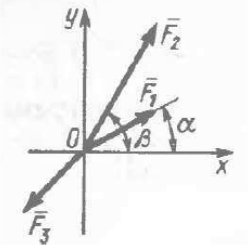
Таблица 6

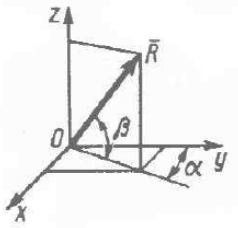
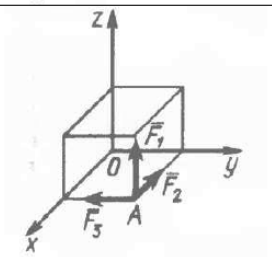
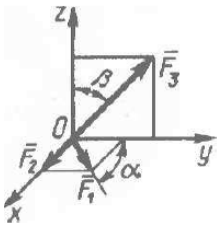
Варианты заданий к задаче 6

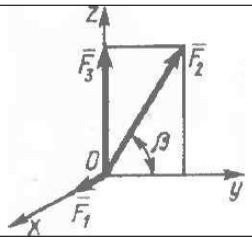
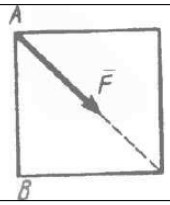
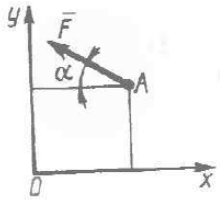
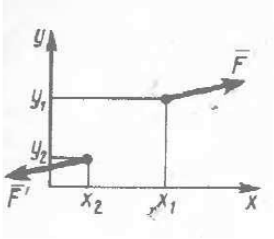
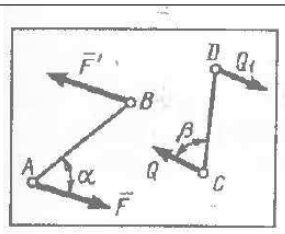
N	F_1	F_2	F_3	F_4	a	b	c
1	10	20	30	14	20	30	40
2	15	16	17	18	10	20	30
3	20	30	14	15	30	40	10
4	18	16	14	20	40	40	20
5	30	15	17	10	30	20	30
6	1	17	16	20	50	30	20
7	30	15	17	30	10	30	50
8	5	18	30	10	20	40	20
9	16	20	10	17	30	30	50
10	15	18	20	10	40	10	20
11	30	17	10	18	50	40	40
12	10	15	30	16	50	50	10
13	20	16	17	18	40	10	60
14	15	20	18	10	60	30	20
15	19	14	16	20	30	60	20
16	30	15	20	17	50	20	60
17	16	30	19	10	40	50	50
18	18	30	20	16	60	60	20
19	19	17	15	30	40	30	10
20	16	30	19	10	50	20	40

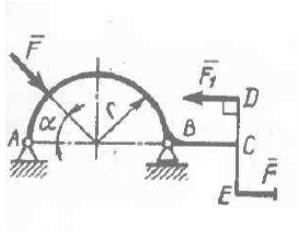
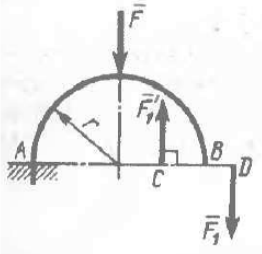
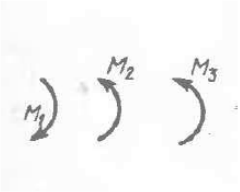
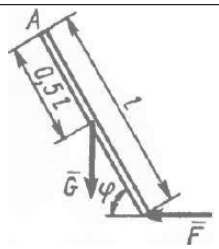
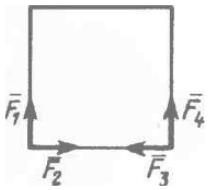
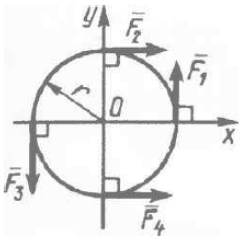
Задачи для самостоятельного решения по темам

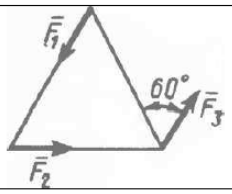
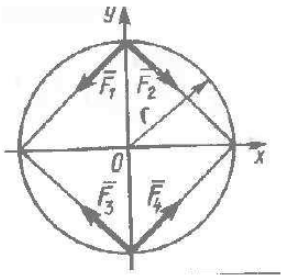
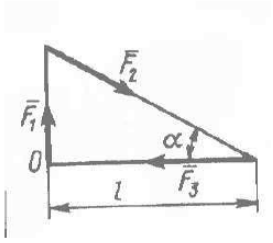
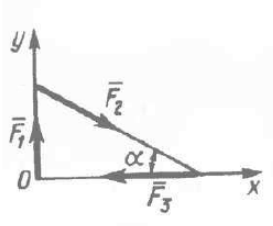
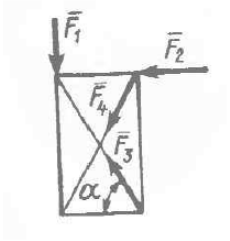
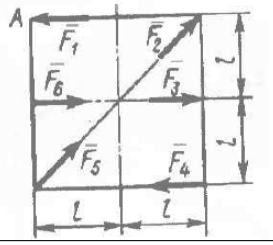
1. Сложение и разложение сходящихся сил на плоскости	
	1.1.Определить модуль равнодействующей двух равных по модулю сходящихся сил $F_1 = F_2 = 5$Н, образующих между собой угол $\alpha = 45°$.(9,24)
	1.2.Определить угол в градусах между равнодействующей двух сил $F_1 = 10$Н и $F_2 = 8$Н и осью ОХ, если угол $\alpha = 30°$. (56,3)

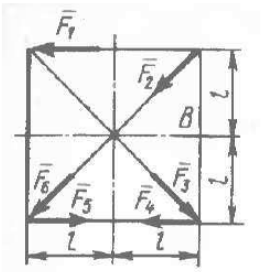
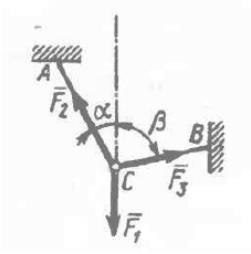
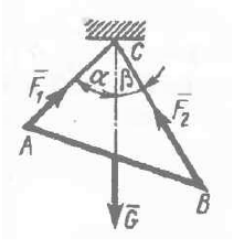
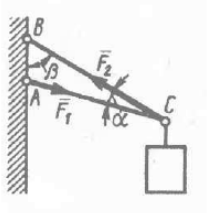
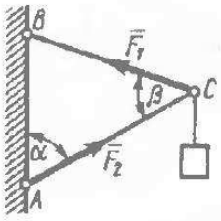
	1.3.Равнодействующая ***R*** двух равных по модулю сходящихся сил $F_1 = F_2 = 15$Н направлена по оси ОУ и равна по модулю 10Н. Определить в градусах угол α, образованный вектором силы F_1 с положительным направлением оси ОХ. (19,5)
	1.4.Определить модуль равнодействующей сходящихся сил $F_1 = 10$Н , $F_2 = 15$Н и $F_3 = 20$Н, если известны углы, образованные векторами этих сил с осью ОХ: $\alpha_1 = 30°$, $\alpha_2 = 45°$ и $\alpha_3 = 60°$. (44,1)
	1.5.Какую по модулю силу $\boldsymbol{F_3}$ надо приложить к сходящимся силам $F_1 = 2$Н и $F_2 = 4$Н, образующим с осью ОХ углы $\alpha = 30°$и $\beta = 60°$, чтобы равнодействующая этих трех сил равнялась нулю?(6,62)
	1.6.Для плоской системы сходящихся сил (Н): $\boldsymbol{F_1} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$; $\boldsymbol{F_2} = 5\mathbf{j}$ и $\boldsymbol{F_3} = 2\mathbf{i}$, определить модуль равнодействующей сходящихся силы. (7,35)
	1.7.Плоская система трех сходящихся сил $\boldsymbol{F_1}$, $\boldsymbol{F_2}$ и $\boldsymbol{F_3}$ находятся в равновесии. Заданы модули сил $F_1 = 3$Н и $F_2 = 2$Н, а так же углы, образованные векторами сил $\boldsymbol{F_1}$и $\boldsymbol{F_2}$ с положительным направлением горизонтальной оси ОХ, соответственно равны $\alpha_1 = 15°$, $\alpha_2 = 45°$. Определить модуль силы $\boldsymbol{F_3}$. (4,84) 1.8. Определить модуль равнодействующей двух сходящихся сил $\boldsymbol{F_1}$и $\boldsymbol{F_2}$, если известны их проекции на декартовы оси координат: $F_{1X} = 3$Н, $F_{1Y} = 6$Н, $F_{2X} = 5$Н, $F_{2Y} = 4$Н. (12,8)

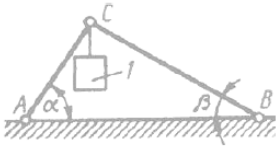
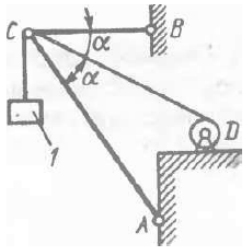
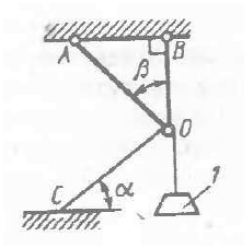
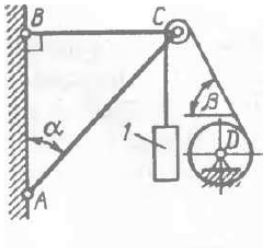
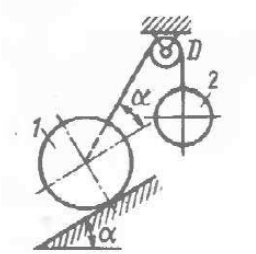
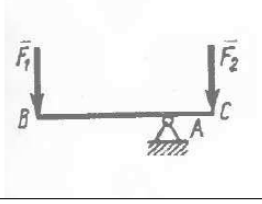
	1.8.Известны проекции на оси координат R_X = 18Н и R_X = 24Н равнодействующей ***R*** плоской системы сходящихся сил $\boldsymbol{F_1}$, $\boldsymbol{F_2}$ и $\boldsymbol{F_3}$, а также проекции сил $\boldsymbol{F_2}$и $\boldsymbol{F_3}$ на эти же оси: F_{2X} = -9Н, F_{2Y} = -7Н, F_{3X} = 12Н, F_{3Y} = 0Н. Определить модуль силы $\boldsymbol{F_1}$. (34,4)
	1.9.Определить в градусах угол между вектором равнодействующей ***R*** системы сил (Н): $\boldsymbol{F_1}$ = 3**i** + 2**j** и $\boldsymbol{F_2}$ = 5**j** + 7**j** и положительным направлением оси ОУ. (41,6)
2. Сложение и разложение сходящихся сил в пространстве	
	2.1.По заданным проекциям силы ***F*** на оси координат: F_X = 20Н , F_Y = 25Н и F_Z = 30Н, определить модуль этой силы. (43,9)
	2.2.Определить косинус угла между вектором силы (Н) ***F*** = 3**i** + 2,45**j** + 7**k** и осью ОХ. (0,375)
	2.3.Модуль равнодействующей ***R*** пространственной системы сходящихся сил равен 150Н. Определить ее проекцию на координатную ось ОУ, если даны углы α = 30°и β = 60°. (65)
	2.4.Определить модуль равнодействующей сил F_1 = 12Н , F_2 =10Н и F_3 = 9Н, приложенных в точке *A,* как показано на рисунке. (18,0)
	2.5. Определить модуль равнодействующей сил F_1 = 15Н , F_2 = 20Н и F_3 = 25Н. Углы, образованные линиями действия сил $\boldsymbol{F_1}$и $\boldsymbol{F_3}$ с осями координат, заданы α = 60°и β = 45°. (50,5)
	2.6.Направление равнодействующей трех сил *R* = 33,8Н задано косинусами направляющих углов: cos α = 0,325; cos β = 0; cos γ = 0,946. Проекции сил $\boldsymbol{F_1}$и $\boldsymbol{F_2}$ на координатные оси соответственно равны F_{1X} = 7Н, F_{1Y} = 10Н, F_{1Z} = 0, F_{2X} = -5Н, F_{2Y} = 15Н, F_{2Z} = 13Н. Определить модуль силы $\boldsymbol{F_3}$. (32,6)
	2.7. Определить модуль равнодействующей трех сходящихся сил, если заданы их проекции на оси координат: F_{1X} = 7Н, F_{1Y} = 10Н, F_{1Z}=0, F_{2X} = -5Н, F_{2Y} = 15Н, F_{2Z}= 12Н: F_{3X} = 6Н, F_{3Y} = 0Н, F_{3Z}= -6Н. (26,9)

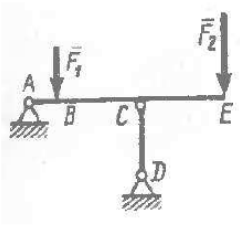
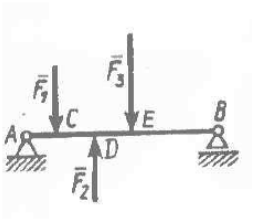
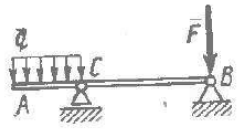
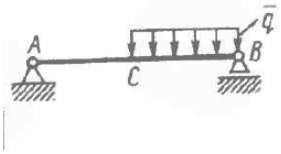
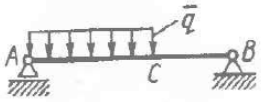
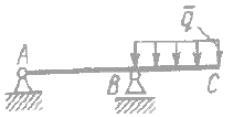
	2.8.Две силы (Н) $\boldsymbol{F_1}$ = 5**i** + 7**j** +9**k** и $\mathbf{F_2}$ = 4**j** + 9**j** + 11**k** приложены в центре О системы прямоугольных координат Oxyz. Определить модуль равнодействующей силы. (27,1)
	2.9.Определить модуль равнодействующей трех сходящихся сил, если заданы их модули F_1= 5кН , F_2 = 12кН и F_3 = 9кН и угол β = 60°. (20,9)
	2.10. Определить косинус угла между вектором силы (Н) $\boldsymbol{F}$ = 3**i** + 4**j** + 5**k** и осью OZ. (0,707)
3.Момент силы относительно точки для плоской системы сил	
	3.1.Определить момент силы относительно начала координат, если сила задана проекциями F_X = F_Y =210Н и известны координаты точки приложения силы x = y= 0,1 м. (0)
	3.2.К вершине *A* квадратной пластины, длины сторон которой равны 0,2 м, приложена сила *F* = 150Н/. Определить момент этой силы относительно точки *B*. (-21,2)
	3.3.Сила *F* = 420Н, приложенная к точке *A*, лежит в плоскости Oxy. Определить момент силы относительно точки O, если координаты x_A = 0,2 м, y_A = 0,3 м и угол α = 30°. (151)
	3.4.Определить момент пары сил (***F, F'***), если силы заданы проекциями F_X = -F'_X = 7,5 Н, F_Y = F'_Y= 2,5 Н и даны координаты точек приложения сил x_1 = 0,1 м, y_1 = 0,015 м, x_2 = 0,015 м, y_2 = 0,02 м. (-0,762)
	3.5.На плиту в ее плоскости действуют две пары сил. Определить сумму моментов этих пар сил, если сила *F* = 8Н, *Q* = 5Н, расстояние *AB*= 0,25м, *CD* = 0,20м, углы α = 60°и β = 70°. (0,792)

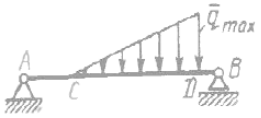
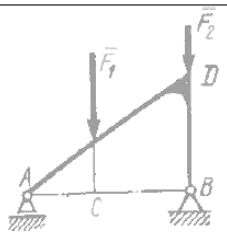
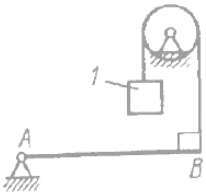
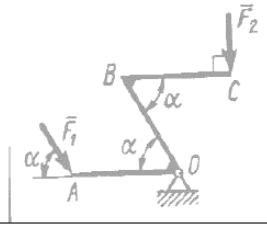
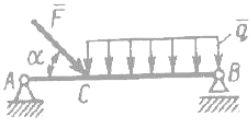
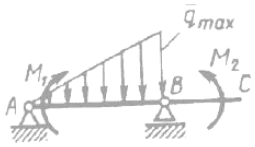
	3.6.На арку *ABC* действуют пары сил (***F₁, F₁'***) и сила *F*=2Н. Определить сумму их моментов относительно точки В, если сила F_1 = 3Н, радиус r = 1м, плечо *DE* = 1,2 м, угол α = 45°. (5,01)
	3.7.На арку *AB* действуют пара сил (***F₁, F₁'***) и сила ***F***. Определить сумму их моментов относительно точки А, если силы *F* = 4Н F_1 = 2Н радиус r = 2м, плечо CD = 1,5 м. (-11,0)
	3.8.В одной плоскости расположены три пары сил. Определить момент пары сил M_3, при котором эта система находится в равновесии, если моменты M_1 = 510Нм, M_2 = 120Нм. (390)
4. Главный вектор и главный момент плоской системы сил. Приведение к простейшему виду	
	4.1. Определить главный момент системы двух сил относительно точки *A,* если силы *G* = 1 Н, *F* =5 Н, расстояние l = 0,2 м, угол φ = 60°. (-0,916)
	4.2. К вершинам квадрата приложены четыре силы F_1 =F_2=F_3=F_4=1Н. Определить модуль равнодействующей этой системы сил. (2,0)
	4.3. За центр приведения данной системы сил выбрана точка, расположенная на оси *Oy,* в которой главный момент равен нулю. Определить ординату этой точки, если силы F_1= F_2 = F_3 = 1Н, F_4=2 Н, радиус r=1м. (-1,0)

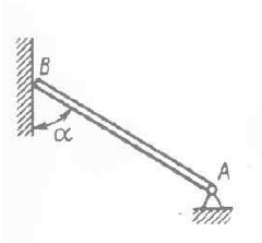
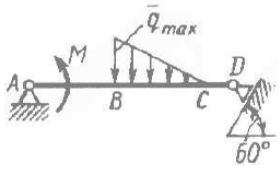
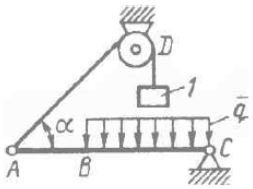
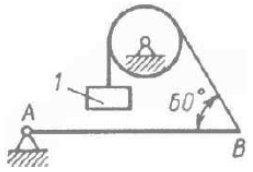
	4.4.К вершинам равностороннего треугольника приложены силы $F_1 = F_2 = F_3 = 1$Н. Определить модуль равнодействующей этой системы сил.(1.0)
	4.5. Заданы силы $F_1 = F_2 = F_3 = 12$ Н, $F_4 = = 14$ Н. Определить главный момент заданной плоской системы сил относительно точки *O,* если радиус r = 0,2 м. (0,283)
	4.6. К вершинам прямоугольного треугольника приложены три силы. Определить значение угла *α* в градусах, при котором главный момент данной системы *сил* M_0 = -2 кН•м, если сила F_2 = 4 кН, расстояние l = 1м. (30,0)
	4.7. К вершинам прямоугольного треугольника приложены силы F_1 = 3 Н, F_2 = 6 Н, F_3 = 14 Н. Определить значение угла α в градусах, при котором главный вектор данной системы сил параллелен оси *Ox*. (30,0)
	4.8. К прямоугольнику приложены четыре силы по 10 Н каждая. Определить модуль главного вектора заданной системы сил, если угол α = 60°. (22,4)
	4.9. К квадрату приложены шесть сил по 6Н каждая. Определить главный момент заданной плоской системы сил относительно точки *A,* если расстояние l = 0,5 м. (8,48)

	4.10. К вершинам квадрата приложены шесть сил по 4 Н каждая. Определить главный момент заданной плоской системы сил относительно точки *B*, если расстояние l = 0,4 м. (4,99)
5. Равновесие плоской системы сходящихся сил	
	5.1. Силы $F_1 = F_2 = 10$ Н и $\boldsymbol{F_3}$ находятся в равновесии. Линии действия сил между собой образуют углы по 120°. Определить модуль силы F_3. (10)
	5.2. Определить модуль силы $\boldsymbol{F_3}$ натяжения троса *BC*, если известно, что натяжение троса *AC* равно F_2 = 15 Н. В положении равновесия углы α = 30° и β = 75°. (7,76)
	5.3. Определить вес балки *AB*, если известны силы натяжения веревок F_1 = 120 Н и F_2 = 80 Н. Заданы углы α = 45° и β = 30° между вертикалью и веревками *AC* и *BC* соответственно. (154)
	5.4. Груз удерживается в равновесии двумя стержнями *AC* и *BC*, шарнирно соединенными в точках *A*, *B* и *C*. Стержень *BC* растянут силой F_2 = 45 Н, а стержень *AC* сжат силой F_1 = = 17 Н. Определить вес груза, если заданы углы α = 15° и β = 60°. (18,1}
	5.5. Шарнирный трехзвенник *ABC* удерживает в равновесии груз, подвешенный к шарнирному болту *C*. Под действием груза стержень *AC* сжат силой F_2 = 25 Н. Заданы углы α = 60° и β = 45°. Считая стержни *AC* и *BC* невесомыми, определить усилие в стержне *BC*. (48,3)

	5.6. Два невесомых стержня *AC* и *BC* соединены в точке *C* и шарнирно прикреплены к полу. К шарниру *C* подвешен груз 1. Определить реакцию стержня *BC*, если усилие в стержне *AC* равно 43 Н, углы $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$. (-24,8)
	5.7. Определить реакцию стержня *AC*, удерживающего в равновесии груз *1* весом 14 Н с помощью цепи, намотанной на барабан *D к* перекинутой через блок *C*, если угол $\alpha = 30°$. (-24,2)
	5.8. Груз 1 весом 20 Н, подвешенный на канате, удерживается в равновесии двумя стержнями *OA* и *OB*, расположенными в вертикальной плоскости. Другой конец каната закреплен в точке *C*. Определить реакцию стержня *OA*, если углы $\alpha = 40°$, $\beta = 45°$. (-21,7)
	5.9. Груз 1 весом 10 Н подвешен с помощью каната, перекинутого через блок *C* и намотанного на барабан лебедки *D*. Определить усилие в стержне *AC*, если углы $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$. (-26,4)
	5.10. Шар 1 весом 16 Н и шар 2 связаны нитью перекинутой через блок *D*, и удерживаются в равновесии. Определить вес шара *2*, если угол $\alpha = 30°$. (9,24)
6. Равновесие плоской системы параллельных сил	
	6.1. На брус *BC*, закрепленный в шарнире *A*, действуют вертикальные силы F_1 = 4 кН и $\boldsymbol{F_2}$. Определить силу F_2 в кН, необходимую для того, чтобы брус в положении равновесия был горизонтальным, если расстояния *AC* = 2 м, *AB* = 6

	м. (12,0)
	6.2. Балка *AE* шарнирно закреплена в точке *A* и опирается на вертикальный стержень *CD*. Определить в кН усилие.в стержне *CD*, если длина *AB* = 1 м, *BC* = *CE* = 2 м, а силы F_1 = 2 кН и F_2 = 4 кН вертикальны. (7,33)
	6.3. На балку *AB* действуют вертикальные силы F_1 = 1 кН, F_2 = 2 кН и F_3 = 3 кН. Определить в кН реакцию опоры *B*, если расстояния *AC* = *CD* = *DE* = 1*м*, *BE* = 2 м. (1,2)
	6.4.На балку *AB* действуют вертикальная сила *F* = 5 кН и распределенная нагрузка интенсивностью *q* = 4 кН/м. Определить в кН реакцию опоры *B*, если длины *AC* = 3 м, *BC* = 6 м. (2,0)
	6.5. На однородную балку *AB*, вес которой *G* = 20 кН действует распределенная нагрузка интенсивностью *q* = 0,5 кН/м. Определить в кН реакцию опоры *A*, если длины *AB* = 6 м, *AC* = *BC*. (10,4)
	6.6.Какой должна быть длина участка *AC* с действующей на него распределенной нагрузкой интенсивностью *q* = 5 кН/м, для того чтобы реакция опоры *B* была равна 10 кН, если длина балки *AB* = 9 м? (6,0)
	6.7.Определить реакцию опоры *B*, если интенсивность распределенной нагрузки *q* = 40 Н/.м,

	размеры балки AB = 4 м, BC = 2 м. (100)
	6.8.Какой должна быть интенсивность q_{max} распределенной нагрузки, для того чтобы реакция опоры B равнялась 200 Н, если размеры AC=2***м***, CD = 3***м***, DB= 1 м? (200)
	6.9.На раму ADB действуют вертикальные силы F_1 = 9 кН и F_2 = 4 кН. Определить в кН реакцию опоры B, если расстояния AC = 2,5 м, AB = 6 м. (7,75)
	6.10.Определить вес груза 1, необходимый для того, чтобы однородная балка AB весом 340 Н в положении равновесия была горизонтальна. (170)
7. Равновесие произвольной плоской системы сил	
	7.1. На рычаг действуют силы F_1 = 50 кН и $\boldsymbol{F_2}$ Определить в кН силу F_2, при которой рычаг в указанном положении находится в равновесии, если угол α = 60°, а длины AO = 3 м, OB = BC = 4 м. (65,0)
	7.2. На балку АВ действуют распределенная нагрузка интенсивностью q = 2 Н/м и сила F = 6 Н . Определить реакцию опоры B, если длина АС = $^1/_3$ АВ, угол α = 45°. (4,08)
	7.3. На балку АС действуют распределенная нагрузка интенсивностью q_{max} = 2,5 Н/м и пары сил с моментами M_1 = 4 Н • м и M_2 = *2* Н • м. Определить реакцию опоры B, если длина AB = 4 м, BC = 0,5 AB. (3,83)

	7.4. Конец *B* однородного бруса весом 100 кН, закрепленного в шарнире *A,* опирается на гладкую стену. Определить в кН давление бруса на стену, если угол α = 60° . (86,6)
	7.5. Определить реакцию опоры *D* в кН, если момент пары сил M = 13 кН • м, интенсивность распределенной нагрузки q_{max} = 8 кН/м, размеры *AB* = *BC* = 3 м, *CD* = 1 м. (10,0)
	7.6. Балка *AC* закреплена в шарнире *C* и поддерживается в горизонтальном положении веревкой AD, перекинутой через блок. Определить интенсивность распределенной нагрузки *q,* если длины *BC* = 5 м, *AC* = 8 м, угол α = 45°, а вес груза 1 равен 20 Н. (9,05)
	7.7. Определить вес груза 1, необходимый для удержания однородной балки AB в равновесии в горизонтальном положении, если ее вес равен 346 II. (200)

Список рекомендуемой литературы

1. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики: в 2-х т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. - Т.1 : Статика и кинематика; Т.2: Динамика. - 11-е изд., стер. - СПб. : Изд-во "Лань", 2009. - 736 с. : ил. ; 21 см. - (Учебники для вузов. Специальная литература).
2. Митюшов, Е.А. Теоретическая механика. Учебник для студентов вузов./ Е.А. Митюшов,С.А. Берестова. – М.: Академия, 2006. –320 с.
3. Никитин, Н.Н. Курс теоретической механики / Н.Н. Никитин. – М.: Высшая школа, 1990. –607 с.
4. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. – М.: Высшая школа, 2010. – 416 с.
5. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике: Учебное пособие / Под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – СПб.: Изд-во "Лань", 2010. – 448 с.
6. Статика. Электронное издание локального распространения, 060190 Э. Методическое пособие. Сост. Ольшанский В.Ю., Ткаченко Г.П. СГТУ, 2005.
7. Кепе, О.Э. Сборник коротких задач по теоретической механике / О.Э. Кепе. – СПб.: Изд-во "Лань", 2008. – 368 с.